

Liceo Scientifico A. Einstein - Milano

PROGRAMMA DI MATEMATICA

Anno scolastico 2017-2018

Classe 5 E

Docente: F. Passeri

ANALISI

Funzioni e loro proprietà

Funzioni reali di variabile reale: Classificazione. Dominio e codominio. Proprietà. Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche. Funzioni crescenti, non decrescenti, decrescenti, non crescenti, monotone. Funzioni pari e dispari. Funzioni periodiche. Funzione inversa. Funzione composta.

Proprietà delle principali funzioni elementari: Funzione potenza, funzione esponenziale e funzione logaritmica, funzioni goniometriche e loro inverse, funzioni iperboliche e loro inverse.

Limiti e continuità

Elementi di topologia: Intervalli aperti, chiusi, limitati, illimitati. Intorno di un punto, intorno circolare. Intorno destro, intorno sinistro. Intorno di infinito. Estremo inferiore, estremo superiore di un insieme. Funzioni limitate o illimitate inferiormente o superiormente. Punto di accumulazione. Punto isolato. Punto di frontiera.

Definizione di limite: Limiti di una funzione al finito e all'infinito. Interpretazione geometrica del concetto di limite. Limite destro, limite sinistro. Insieme reale esteso e definizione generale di limite. Asintoto orizzontale, verticale, obliquo.

Teoremi sui limiti: Teorema di unicità del limite. Teorema di limitatezza locale. Teorema della permanenza del segno. Teorema del confronto.

Calcolo di limiti: Operazioni sui limiti. Infiniti, infinitesimi e loro confronto rispetto a un infinito o un infinitesimo campione. Principio di sostituzione degli infiniti e degli infinitesimi. Gerarchia degli infiniti. Simboli di Landau. Forme di indecisione. Limiti notevoli. Comportamenti asintotici. Risoluzione delle forme di indecisione.

Funzioni continue: Definizione locale di continuità. Funzione continua in un intervallo. Esempi di funzioni non continue: funzione parte intera, funzione mantissa, funzione gradino o di Heaviside, funzione di Dirichlet. Continuità della funzione inversa e della funzione composta. Punti di discontinuità di una funzione: discontinuità di prima o seconda specie, discontinuità eliminabile. Prolungamento per continuità di una funzione.

Teoremi sulle funzioni continue: Definizione di massimo e minimo assoluto e relativo di una funzione. Teorema della permanenza del segno. Teorema di Weierstrass. Teorema dei valori intermedi. Teorema dell'esistenza degli zeri (o di Bolzano).

Calcolo differenziale

Derivata di una funzione: Definizione di rapporto incrementale e significato geometrico. Limite del rapporto incrementale: definizione di derivata di una funzione in un punto. Interpretazione geometrica. Funzione derivabile in un punto e in un intervallo. Derivata sinistra e derivata destra. Funzione derivata. Continuità e derivabilità.

Calcolo delle derivate: Derivate delle funzioni elementari. Operazioni con le derivate. Derivata del reciproco di una funzione. Derivata del quoziente di due funzioni. Derivata di una funzione composta. Derivata della funzione $f(x)^{g(x)}$. Derivata della funzione inversa. Derivate di ordine superiore al primo. Equazione della retta tangente e della retta normale al grafico della funzione in un punto. Punti di non derivabilità: punti angolosi, cuspidi, semicuspidi, flessi a tangente verticale. Differenziale di una funzione. Interpretazione geometrica del differenziale. Applicazione alla fisica.

Teoremi sulle funzioni derivabili: Teorema di Rolle. Teorema di Lagrange. Interpretazione geometrica. Conseguenze del teorema di Lagrange. Derivate e funzioni crescenti e decrescenti. Teorema di Cauchy. Teorema di de L'Hôpital.

Massimi, minimi, flessi: Punti estremanti assoluti e relativi. Punti stazionari di una funzione. Teorema di Fermat. Crescenza, decrescenza e segno della derivata prima. Criterio per la determinazione dei massimi e dei minimi relativi con la derivata prima. Punti stazionari di flesso a tangente orizzontale.

Concavità di una funzione in un punto e in un intervallo. Definizione di flesso. Concavità e segno della derivata seconda. Condizione necessaria per i flessi. Criterio per la determinazione dei flessi con la derivata seconda.

Problemi di massimo e minimo: Problemi di geometria analitica. Problemi di geometria piana e solida. Problemi di trigonometria.

Serie di Taylor e Maclaurin: Sviluppo di Maclaurin delle principali funzioni elementari. Raggio di convergenza della serie. Resto di Peano. Risoluzione di forme di indecisione mediante sviluppi in serie.

Studio di funzione

Grafici: Funzioni razionali e irrazionali, funzioni esponenziali e logaritmiche, funzioni goniometriche, funzioni inverse delle funzioni goniometriche, funzioni iperboliche, funzioni con valori assoluti. Grafico della funzione derivata e della funzione integrale. Grafici deducibili.

Applicazioni: Risoluzione grafica di equazioni e disequazioni. Risoluzione approssimata di un'equazione: separazione delle radici, teoremi di unicità dello zero, metodo di bisezione, metodo delle tangenti.

Calcolo integrale

Integrale definito: Trapezoide. Somme integrali inferiore e superiore. Definizione di integrale definito di una funzione continua. Interpretazione geometrica. Proprietà dell'integrale definito: additività rispetto all'intervallo, monotonia, linearità, integrale del valore assoluto di una funzione. Teorema della media integrale. Funzione integrale. Primitiva della funzione. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Formula fondamentale del calcolo integrale. Integrale di Riemann. Applicazione alla fisica.

Integrale indefinito: Definizione di integrale indefinito. Integrali indefiniti immediati. Integrazione di funzioni razionali fratte. Metodi di integrazione: integrazione per sostituzione, integrazione per parti.

Calcolo di aree e volumi: Area compresa tra una curva e l'asse delle ascisse o l'asse delle ordinate. Area compresa tra due curve. Formula per l'area del segmento parabolico.

Volume di un solido di rotazione: rotazione attorno all'asse delle ascisse o all'asse delle ordinate. Esempi: volume della sfera, volume del cono, volume del tronco di cono.

Metodo dei gusci cilindrici. Metodo delle sezioni. Lunghezza di un arco di curva.

Integrali impropri: Integrali impropri di prima specie: integrale di una funzione in un intervallo illimitato. Integrali impropri di seconda specie: integrale di una funzione con un numero finito di punti di discontinuità. Calcolo di aree e volumi mediante l'utilizzo di integrali impropri.

Equazioni differenziali

Introduzione: Definizione di equazione differenziale. Integrale generale e integrale particolare. Ordine dell'equazione differenziale. Forma normale. Problema di Cauchy.

Equazioni differenziali ordinarie: Equazioni differenziali del primo ordine: equazioni a variabili separabili, equazioni lineari del primo ordine. Equazioni differenziali omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti.

Applicazioni alla fisica: Oscillatore armonico. Oscillatore armonico smorzato (sovrasmorzamento, smorzamento critico, oscillazione smorzata). Pendolo semplice. Moto di un corpo in un fluido: legge di Stokes. Legge del decadimento radioattivo. Legge del raffreddamento di Newton. Moto di una spira in campo magnetico uniforme. Circuiti RC: processo di carica e scarica del condensatore. Circuiti RL: chiusura del circuito, circuito in evoluzione libera. Circuiti LC: oscillazioni elettromagnetiche. Circuiti RLC: oscillazioni elettromagnetiche smorzate.

CALCOLO COMBINATORIO E PROBABILITA'

Calcolo combinatorio

Permutazioni semplici e permutazioni con ripetizione. Disposizioni semplici e disposizioni con ripetizione. Combinazioni semplici. Proprietà dei coefficienti binomiali. Binomio di Newton.

Probabilità

Introduzione: Definizione di esperimento aleatorio, spazio campionario, evento elementare, evento. Definizione classica, frequentista, soggettiva della probabilità.

Teoria assiomatica: Funzione probabilità. Assiomi elementari. Probabilità dell'evento contrario. Evento certo e evento impossibile. Eventi compatibili e incompatibili. Probabilità della somma logica di due eventi. Eventi dipendenti e indipendenti. Probabilità condizionata. Probabilità del prodotto logico di due eventi. Teorema delle probabilità totali. Teorema di Bayes.

Distribuzioni di probabilità

Introduzione: Variabili aleatorie discrete: distribuzione di probabilità, funzione di ripartizione. Variabili aleatorie continue: densità di probabilità, funzione di ripartizione. Funzioni di variabili aleatorie. Valori caratterizzanti una variabile aleatoria: valore medio e varianza, deviazione standard. Proprietà del valore medio e della varianza. Covarianza.

Distribuzioni discrete: Distribuzione uniforme. Distribuzione binomiale o di Bernoulli. Distribuzione multinomiale. Distribuzione geometrica. Formula di Stirling. Distribuzione di Poisson.

Distribuzioni continue: Distribuzione uniforme. Distribuzione normale o di Gauss. Distribuzione esponenziale. Variabili aleatorie standardizzate.

ESERCITAZIONI RIEPILOGATIVE

Svolgimento Tema di Matematica – Esame di Stato L.S. – Sessione ordinaria 2017
Svolgimento Tema di Matematica – Esame di Stato L.S. – Sessione ordinaria 2016
Svolgimento Tema di Matematica – Esame di Stato L.S. – Sessione ordinaria 2015
Svolgimento Tema di Matematica – Esame di Stato L.S. – Sessione ordinaria 2014
Svolgimento Tema di Matematica – Esame di Stato L.S. – Sessione ordinaria 2013
Svolgimento Tema di Matematica – Esame di Stato L.S. – Sessione ordinaria 2012